Leseprobe aus:

Ian Stewart

Welt-Formeln

Mehr Informationen zum Buch finden Sie auf rowohlt.de.

Ian Stewart

WELT-FORMELN

17 MATHEMATISCHE GLEICHUNGEN, DIE GESCHICHTE MACHTEN

Aus dem Englischen von
Monika Niehaus und Bernd Schuh

Rowohlt Taschenbuch Verlag

Die englische Originalausgabe erschien 2012 unter dem Titel
«Seventeen Equations that Changed the World» bei Basic Books, London.

Deutsche Erstausgabe
Veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag,
Reinbek bei Hamburg, März 2014

Redaktion Heiner Höfener
Umschlaggestaltung ZERO Werbeagentur, München
(Umschlagabbildung: FinePic, München)
Innentypografie Daniel Sauthoff
Satz Minion PostScript (InDesign) bei
Pinkuin Satz und Datentechnik, Berlin
Druck und Bindung CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany
ISBN 978 3 499 63029 3

INHALT

«Um die mühsame Wiederholung der Wörter ‹ist das Gleiche wie› zu vermeiden, werde ich, wie ich es häufig bei meinen Arbeiten tue, zwei parallele Striche einsetzen oder zwillingshafte Linien gleicher Länge, weil keine zwei Dinge sich mehr gleichen können.»

Robert Recorde, Der Wetzstein des Wissens, 1557

WARUM GLEICHUNGEN?

Gleichungen sind das Lebenselixier von Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. Ohne sie würde es unsere Welt in ihrer gegenwärtigen Form nicht geben. Gleichungen stehen jedoch in dem Ruf, abschreckend zu wirken: So erklärten Stephen Hawkings Verleger ihrem Autor, jede Gleichung werde den Verkaufserfolg seines Buches *Eine kurze Geschichte der Zeit* halbieren, ignorierten aber dann ihren eigenen Rat und erlaubten ihm, $E = mc^2$ aufzunehmen, obwohl sie ohne die Formel doch angeblich weitere 10 Millionen Exemplare verkauft hätten. Ich bin auf Hawkings Seite. Gleichungen sind zu wichtig, um sie zu verstecken. Aber diese Verleger hatten auch in gewisser Weise recht: Gleichungen sind formal und streng, sie sehen kompliziert aus, und selbst diejenigen unter uns, die Gleichungen lieben, können verscheucht werden, wenn sie mit ihnen bombardiert werden.

In diesem Buch habe ich eine gute Entschuldigung. Da es *ausdrücklich* um Gleichungen geht, kann ich ebenso wenig vermeiden, Gleichungen aufzunehmen, wie ich ein Buch über Bergsteigen schreiben könnte, ohne das Wort «Berg» zu verwenden. Ich möchte Sie überzeugen, dass Gleichungen eine wichtige Rolle bei der Schaffung unserer heutigen Welt gespielt haben, von der Kartographie bis zum Navi, von Musik bis zum Fernsehen, von der Entdeckung Amerikas bis zur Erforschung der Jupitermonde. Zum Glück muss man kein wissenschaftliches Genie sein, um die Poesie und Schönheit einer guten, bedeutenden Gleichung schätzen zu können.

In der Mathematik gibt es zwei Typen von Gleichungen, die, oberflächlich betrachtet, sehr ähnlich aussehen. Der eine Typ stellt Beziehungen zwischen verschiedenen mathematischen Größen her: Die Aufgabe besteht darin nachzuweisen, dass die Gleichung wahr ist. Der andere Typ liefert Information über eine unbekannte Größe, und die Aufgabe des Mathematikers besteht darin, die Gleichung zu *lösen* – das Unbekannte bekannt zu machen. Die Unterscheidung ist nicht eindeutig, denn manchmal lässt sich dieselbe Gleichung auf beiderlei Weisen einsetzen, doch sie stellt eine nützliche Leitlinie dar. In diesem Buch werden Sie beide Typen finden.

Gleichungen in der reinen Mathematik gehören im Allgemeinen zum ersten Typ: Sie enthüllen wunderbare Muster und Regelmäßigkeiten. Sie sind gültig, weil es angesichts unserer Annahmen über die logische Struktur der Mathematik keine Alternative gibt. Der Satz des Pythagoras, der eine Gleichung darstellt, ausgedrückt in der Sprache der Geometrie, ist ein Beispiel. Wenn man Euklids Grundannahmen über Geometrie akzeptiert, dann ist der Satz des Pythagoras *wahr*.

Gleichungen in der angewandten Mathematik und in der mathematischen Physik gehören gewöhnlich zum zweiten Typ. Sie codieren Information über die wirkliche Welt; sie drücken Eigenschaften des Universums aus, die im Prinzip ganz anders hätten aussehen können. Newtons Gravitationsgesetz ist ein gutes Beispiel. Es sagt uns, wie die Anziehungskraft zwischen zwei Körpern von ihrer Masse und Entfernung abhängt. Die Lösung der resultierenden Gleichung sagt uns dann, wie die Planeten die Sonne umkreisen oder wie man eine Flugbahn für eine Raumsonde entwerfen sollte. Newtons Gesetz ist jedoch kein mathematisches Theorem; es stimmt aus physikalischen Gründen; es passt zu den Beobachtungen. Das Gesetz der Schwerkraft hätte auch anders aussehen können. Tatsächlich *ist* es anders: Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie verbessert Newtons Gesetz, da sie einige Beobachtungen besser erklärt, während sie diejenigen unangetastet lässt, von denen wir bereits wissen, dass Newtons Gesetz gut auf sie passt.

Der Lauf der menschlichen Geschichte ist immer wieder durch eine Gleichung in eine andere Richtung gelenkt worden. Gleichungen verfügen über verborgene Macht. Sie enthüllen die innersten Geheimnisse der Natur. Unter diesem Blickwinkel sehen Historiker den Aufstieg und Fall von Zivilisationen gewöhnlich nicht. Könige und Königinnen und Kriege und Naturkatastrophen findet man in Geschichtsbüchern in Hülle und Fülle, doch Gleichungen sind dünn gesät. Das ist unfair. Zu viktorianischen Zeiten demonstrierte Michael Faraday in der Royal Institution in London Besuchergruppen die Verbindung zwischen Magnetismus und Elektrizität. Einer Anekdote nach fragte ihn der spätere Premierminister William Gladstone, ob daraus irgendwelche praktische Konsequenzen erwachsen würden. Wie es heißt (die Beweislage ist dünn, aber warum eine schöne Geschichte ruinieren?), soll Faraday ihm geantwortet haben: «Durchaus, Sir. Eines Tages werden Sie darauf Steuern erheben.» Falls er das wirklich gesagt hat, hatte er recht. James Clerk Maxwell verwandelte frühe experimentelle Beobachtungen und empirische Gesetze über Magnetismus in ein System von Gleichungen für den Elektromagnetismus. Zu den vielen Konsequenzen, die daraus erwuchsen, gehörten Radio, Radar und Fernsehen.

Eine Gleichung bezieht ihre Macht aus einer einfachen Quelle. Sie sagt uns, dass zwei Berechnungen, die unterschiedlich erscheinen, die gleiche Antwort haben. Das Schlüsselsymbol ist das Gleichheitszeichen, =. Der Ursprung der meisten mathematischen Symbole ist entweder im Nebel der Zeit verschollen oder so jung, dass es keinerlei Zweifel gibt. Das Gleichheitszeichen ist ungewöhnlich, da es 450 Jahre zurückdatiert, wir aber nicht nur wissen, *wer* es erfunden hat, sondern auch *warum*. Der Erfinder war Robert Recorde, der es 1557 in seinem Buch *The Whetstone of Witte* (*Der Wetzstein des Wissens*) einführte. Recorde verwendete zwei parallele Linien (er benutzte einen veralteten englischen Begriff, *gemowe*, was so viel wie «Zwilling» bedeutet), um mühsame Wiederholungen der Wörter ‹ist das Gleiche wie› zu vermeiden. Dieses Symbol wählte er, weil «keine zwei Dinge sich mehr gleichen können als Zwillinge». Recorde traf eine gute Wahl. Sein Symbol ist seit nun 450 Jahren in Gebrauch.

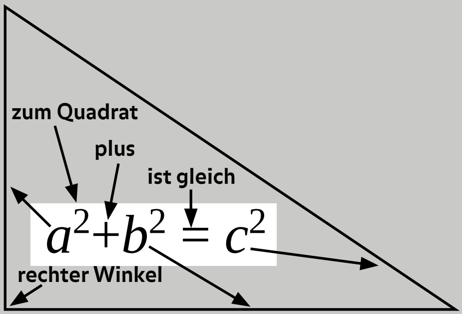
Die Macht einer Gleichung liegt in der philosophisch schwierigen Korrespondenz zwischen Mathematik, einer kollektiven Schöpfung des menschlichen Geistes und einer äußerlichen physischen Wirklichkeit. Gleichungen machen tief gehende Strukturen der Außenwelt erfassbar und geben ihnen eine Form. Dadurch, dass wir lernen, Gleichungen wertzuschätzen und die Geschichten zu lesen, die sie erzählen, können wir wichtige Merkmale der Welt um uns herum entdecken. Prinzipiell könnte es andere Möglichkeiten geben, dasselbe Ergebnis zu erreichen. Viele Menschen ziehen Wörter Symbolen vor; auch Sprache verleiht uns Macht über unsere Umgebung. Das Verdikt von Naturwissenschaften und Technik lautet jedoch: Wörter sind zu ungenau, und unser Sprachschatz ist zu begrenzt, um uns wirklich Zugang zu den tieferen Aspekten der Wirklichkeit zu eröffnen. Die menschliche Sprache ist zu stark durch Annahmen und Assoziationen gefärbt. Wörter allein können uns nicht die wesentlichen Einsichten liefern, die wir brauchen.

Gleichungen können es. Sie gehören seit Jahrtausenden zu den wichtigsten Triebkräften in der menschlichen Zivilisation. Unsere ganze Geschichte hindurch haben Gleichungen die Fäden in der Gesellschaft gezogen. Sicherlich im Verborgenen – doch der Einfluss war da, ob bemerkt oder unbemerkt. Dies ist die Geschichte des Aufstiegs der Menschheit, erzählt anhand von 17 Gleichungen.

Kapitel 1

DIE SQUAW AUF DEM NILPFERD

Der Satz des Pythagoras



Was sagt sie uns?
Wie die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zueinander in Beziehung stehen.

Warum ist das wichtig?
Sie stellt ein wesentliches Bindeglied zwischen Geometrie und Algebra dar und erlaubt uns, Entfernungen in Form von Koordinaten zu berechnen. Zudem hat sie die Trigonometrie inspiriert.

Was hat sie gebracht?
Landvermessung, Navigation und in neuerer Zeit die Spezielle und die Allgemeine Relativitätstheorie – die beiden gegenwärtig besten Theorien über Raum, Zeit und Schwerkraft.

Fordern Sie irgendeinen Schüler auf, einen berühmten Mathematiker zu nennen, und falls ihnen überhaupt ein solcher einfällt, werden die meisten sicherlich für Pythagoras optieren. Falls nicht, fällt vielleicht der Name Archimedes. Selbst der berühmte Isaac Newton spielt hinter diesen beiden Superstars der Antike nur die dritte Geige. Archimedes war ein intellektueller Riese, Pythagoras wahrscheinlich nicht, doch er verdient mehr Anerkennung, als er oft erhält. Nicht für das, was er geleistet hat, sondern für das, was er in Gang gesetzt hat.

Pythagoras wurde um 570 v. Chr. auf der griechischen Insel Samos in der östlichen Ägäis geboren. Er war Philosoph und Geometer. Das Wenige, was wir über sein Leben wissen, stammt von viel späteren Autoren, und wie historisch korrekt diese Informationen sind, ist fraglich, doch die wichtigsten Daten sind wahrscheinlich korrekt. Um 530 v. Chr. siedelte er wahrscheinlich nach Kroton über, einer griechischen Kolonie im heutigen Süditalien. Dort gründete er eine philosophisch-religiöse Schule, die Pythagoreer, die glaubten, das Universum basiere auf Zahlen. Der heutige Ruhm ihres Gründers beruht auf dem Satz, der seinen Namen trägt. Dieser Satz wird seit mehr 2000 Jahren gelehrt und hat Eingang in die Popkultur gefunden. In den Film *Merry Andrew* (1958), in dem Danny Kaye die Hauptrolle spielte, heißt es in einem Song:

Das Quadrat der Hypotenuse
Eines rechtwinkligen Dreiecks
Ist gleich

der Summe der Quadrate
der beiden anliegenden Seiten.

Der Song fährt mit einer doppeldeutigen Aufforderung fort, seine Partizipien nicht baumeln zu lassen, und verknüpft Einstein, Newton und die Gebrüder Wright mit dem berühmten Satz. Die beiden ersten rufen «Heureka!», nein, das war Archimedes. Sie merken schon, dass sich der Songtext nicht gerade durch historische Präzision auszeichnet, aber das ist nun mal Hollywood. In Kapitel 13 werden wir jedoch sehen, dass der Songtexter Johnny Mercier wahrscheinlich näher an Einstein dran war, als ihm bewusst war.

Der Satz des Pythagoras taucht im englischen Sprachraum in einem sehr bekannten Witz auf, der auf schrecklichen Kalauern über die Squaw auf dem Nilpferd (engl. *hippopotamus*, verballhornt Hypotenuse) basiert. Man findet den Witz überall im Internet, doch deutlich schwieriger ist es, seinen Ursprung zu finden.[1] Darüber hinaus gibt es Pythagoras-Cartoons, Pythagoras-T-Shirts und sogar eine griechische Briefmarke (Abbildung 1).

Abbildung 1: Griechische Briefmarke, die den Satz des Pythagoras illustriert.

Trotz all diesem Rummel wissen wir nicht, ob Pythagoras seinen Satz tatsächlich *bewies*. Tatsächlich wissen wir nicht einmal, ob der Satz von ihm stammt. Er könnte durchaus von einem seiner Schüler oder einem babylonischen oder sumerischen Schreiber entdeckt worden sein. Aber Pythagoras strich den Ruhm ein, und sein Name blieb damit verbunden. Welchen Ursprungs auch immer, der Satz und seine Konsequenzen hatten einen gewaltigen Einfluss auf die menschliche Geschichte. Sie öffneten buchstäblich unsere Welt.

Die Griechen drückten den Satz des Pythagoras nicht als Gleichung im modernen symbolischen Sinne aus. Das kam erst später mit der Entwicklung der Algebra. In der Antike wurde der Satz verbal und geometrisch formuliert. Eine elegante Form erhielt der Satz erst in den Schriften des Alexandriners Euklid, der auch den ersten, uns überlieferten Beweis führte. Um 250 v. Chr. wurde Euklid durch seine berühmten *Elemente*, das einflussreichste mathematische Lehrbuch aller Zeiten, zum ersten modernen Mathematiker. Euklid verwandelte Geometrie in Logik, indem er seine Grundannahmen explizit formulierte und dann benutzte, um all seine Sätze systematisch zu beweisen. Er baute einen begrifflichen und gedanklichen Turm, dessen Fundament Punkte, Linien und Kreise waren und dessen Zinnen aus genau fünf regelmäßigen Körpern bestand.

Eines der Juwelen in Euklids Krone war der Satz, den wir heute den Satz des Pythagoras nennen: Satz 47 aus Euklids Elementen lautet: *In den rechtwinkligen Dreiecken ist das Quadrat, welches von der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite beschrieben wird, den Quadraten, welche von den ihn einschließenden Seiten beschrieben werden, gleich*.

Kein *hippopotamus*. Und auch keine Hypotenuse. Nicht einmal ein ausdrückliches «Summe» oder «addieren sich». Dennoch stellt der Satz des Pythagoras eindeutig eine Gleichung dar, da er das entscheidende Wort *gleich* enthält.

Was höhere Mathematik angeht, so arbeiteten die Griechen mit Linien und Flächen statt mit Zahlen. Daher hätten Pythagoras und seine griechischen Nachfolger den Satz als Gleichheit von Flächen formulieren können: «Die Fläche eines Quadrats, das mit Hilfe der längsten Seite eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert wird, ist die Summe der Flächen der Quadrate, die aus den beiden anderen Seiten gebildet werden.» Die längste Seite ist die berühmte Hypotenuse, was so viel bedeutet wie «die sich unten erstreckende [Dreieckseite]», wie es der Fall ist, wenn man das Diagramm in der geeigneten Orientierung zeichnet (Abbildung 2, links).

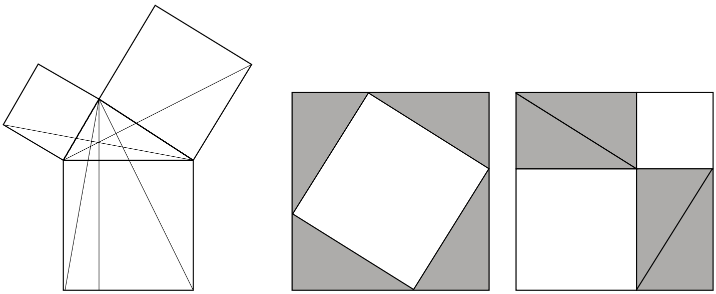


Abbildung 2: *Links:* Konstruktionsgeraden für Euklids Beweis des Satzes des Pythagoras. *Mitte und rechts:* Alternativer Beweis für den Satz. Die äußeren Quadrate haben die gleiche Fläche, und alle schattierten Dreiecke haben ebenfalls die gleiche Fläche. Daher hat das gekippte weiße Quadrat die gleiche Fläche wie die beiden anderen weißen Quadrate zusammen.

Innerhalb von nur 2000 Jahren ist der Satz des Pythagoras als algebraische Gleichung in eine neue Form gegossen worden:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dabei ist c die Länge der Hypotenuse, a und b sind die Längen der anderen beiden Seiten, und die kleine hochgestellte 2 bedeutet «zum Quadrat». Algebraisch ist das Quadrat einer jeden Zahl eben diese Zahl, multipliziert mit sich selbst, und wir wissen, dass die Fläche eines jeden Quadrats dem Quadrat der Länge seiner Seite entspricht. Daher sagt Pythagoras' Gleichung, wie ich sie nun nennen will, dasselbe aus, was Euklid sagte – abgesehen von verschiedenen psychologischen Altlasten, die damit zu tun haben, wie man in der Antike über grundsätzliche mathematische Konzepte wie Zahlen und Flächen dachte, ein Thema, das ich an dieser Stelle nicht weiter vertiefen möchte.

Die Gleichung des Pythagoras hat viele Verwendungen und Konsequenzen. Ganz direkt erlaubt sie, die Länge der Hypotenuse zu berechnen, wenn die beiden anderen Seiten gegeben sind. Nehmen wir zum Beispiel an, dass $a = 3$ und $b = 4$ ist. Dann gilt: $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Daher ist $c = 5$. Das ist das berühmte 3–4–5-Dreieck, das in der Schulmathematik allgegenwärtig ist und das einfachste Beispiel für ein pythagoreisches Tripel darstellt: eine Liste ganzer Zahlen, die die Gleichung des Pythagoras erfüllen. Das nächsteinfache Tripel ist, abgesehen von skalierten Versionen wie 6–8–10, das 5–12–13-Dreieck. Es gibt unendlich viele solcher Tripel, und die Griechen wussten, wie man sie konstruiert. Derartige Tripel sind in der Zahlentheorie noch immer von gewissem Interesse, und selbst in den letzten zehn Jahren sind neue Eigenschaften entdeckt worden.

Statt c mit Hilfe von a und b zu bestimmen, kann man indirekt vorgehen und die Gleichung nach a auflösen, wenn b und c bekannt sind. Man kann auch subtilere Fragen beantworten, wie wir gleich sehen werden.

Warum ist der Satz wahr? Euklids Beweis ist ziemlich kompliziert und erfordert, im Diagramm in Abbildung 2 (*links*) fünf zusätzliche Linien zu ziehen und sich auf mehrere bereits zuvor bewiesene Sätze zu stützen. Viktorianische Schuljungen (damals gab es nur wenige Mädchen, die sich mit Geometrie beschäftigten) bezeichneten das Diagramm wenig ehrerbietig als «Pythagoras' Hosen». Ein direkter und intuitiver, wenn auch nicht sehr eleganter Beweis benutzt vier Kopien des Dreiecks, um zwei Lösungen desselben mathematischen Puzzles zu verknüpfen (Abbildung 2, *rechts*). Das Bild ist überzeugend, doch die Ergänzung der logischen Details erfordert einiges an Nachdenken. Woher wissen wir zum Beispiel, dass die gekippte weiße Figur in der Mitte des Bildes ein Quadrat ist?

Vieles spricht dafür, dass der Satz des Pythagoras schon lange vor Pythagoras bekannt war. Ein babylonisches Tontäfelchen[2] im Britischen Museum enthält in Keilschrift ein mathematisches Problem und seine Antwort, die man etwa so übersetzen könnte:

> 4 ist die Länge und 5 die Diagonale. Was ist die Breite?
> 4 mal 4 ist 16.
> 5 mal 5 ist 25.
> Nimm 16 von 25 und übrig bleiben 9.
> Wie oft muss ich welche Zahl malnehmen, um 9 zu erhalten?
> 3 mal 3 ist 9.
> Daher ist 3 die Breite.

Deshalb kannten die Babylonier zweifellos das 3-4-5-Dreieck, und das bereits 1000 Jahre vor Pythagoras.

Ein anderes Täfelchen, YBC 7289 aus der babylonischen Sammlung der Yale University, zeigt Abbildung 3 (*links*). Zu sehen ist das Diagramm eines Quadrats mit einer Seitenlänge von 30, dessen

Diagonale zwei Zahlenlisten trägt: 1, 24, 51, 10 und 42, 25, 35. Die Babylonier benutzten eine auf der Zahl 60 basierende Notation, daher liest sich die erste Liste tatsächlich als $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$, was, in Dezimalzahlen ausgedrückt, 1,4142129 ist. Die Quadratwurzel von 2 ist 1,4142135. Die zweite Liste entspricht dem 30-Fachen dieses Werts. Also wussten die Babylonier, dass die Diagonale eines Quadrats gleich der Seitenlänge multipliziert mit der Quadratwurzel von 2 ist. Da $1^2 + 1^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$ ist, ist dies ebenfalls ein Beispiel für den Satz des Pythagoras.

Abbildung 3: ***Links*****: YBC 7289.** ***Rechts*****: Plimpton 322.**

Noch bemerkenswerter, wenn auch rätselhafter, ist die Tontafel Plimpton 322 aus der George-Arthur-Plimpton-Sammlung der Columbia University (Abbildung 3, *rechts*). Es handelt sich um eine Tabelle mit vier Spalten und 15 Zeilen. Die letzte Spalte listet lediglich die Zeilenzahlen auf, von 1 bis 15. Im Jahr 1945 haben die Wissenschaftshistoriker Otto Neugebauer und Abraham Sachs[3] festgestellt, dass das Quadrat der Zahl (nennen wir es c) in der dritten Spalte minus dem Quadrat der Zahl (nennen wir es b) in der zweiten Spalte in jeder Zeile selbst ein Quadrat (nennen wir es a) ist. Daraus folgt $a^2 + b^2 = c^2$; daher enthält die Tafel offenbar pythagoreische Tripel. Zumindest ist das der Fall, wenn man vier offensichtliche Fehler korrigiert. Dennoch ist nicht absolut sicher, dass Plimpton 322 etwas mit pythagoreischen Tripeln zu tun hat, und selbst wenn das der Fall sein sollte, könnte es lediglich eine bequeme Liste von Dreiecken gewesen sein, deren Fläche leicht zu berechnen war. Diese könnten dann gesammelt worden sein, weil sie gute Näherungswerte für andere Dreiecke und Formen lieferten, beispielsweise im Rahmen von Landvermessungen.

Eine andere herausragende antike Zivilisation ist die des alten Ägypten. Einiges spricht dafür, dass Pythagoras als junger Mann Ägypten besucht hat, und einige Historiker vermuten, dass er dort auf seinen Satz gestoßen ist. Die Berichte ägyptischer Mathematiker, die bis in unsere Zeit überdauert haben, stützen diese Vermutung kaum, doch ihre Zahl ist recht gering. Oft wird – in der Regel im Zusammenhang mit den Pyramiden – darauf verwiesen, dass die Ägypter rechte Winkel mit Hilfe des 3-4-5-Dreiecks konstruierten, indem sie ein Seil mit 12 Knoten in gleichen Abständen entsprechend auslegten, und Archäologen solche Seile gefunden hätten. Beide Behauptungen ergeben jedoch nicht viel Sinn. Eine solche Technik wäre nicht sehr zuverlässig gewesen, denn Seile kann man dehnen und die Knotenabstände hätten sehr genau eingehalten werden müssen. Die Präzision, mit der die Pyramiden von Gizeh errichtet worden sind, ist allem überlegen, was man mit einem solchen Seil hatte erreichen können. Weitaus praktischere Werkzeuge, ähnlich dem Winkel eines Zimmermanns, sind gefunden worden. Ägyptologen, die auf antike ägyptische Mathematik spezialisiert sind, kennen keine Berichte, die besagen, dass Seile oder Schnüre verwendet wurden, um ein 3-4-5-Dreieck zu konstruieren, und es gibt keine Beispiele für solche Seile. Daher ist diese Geschichte, so hübsch sie auch sein mag, höchstwahrscheinlich eine Legende.

Wenn wir Pythagoras in unsere moderne Welt versetzen könnten, würde er viele Unterschiede zwischen damals und heute feststellen. In seiner Zeit war das medizinische Wissen rudimentär, künstliches Licht spendeten nur Kerzen und Fackeln, und die schnellste Form der Kommunikation war ein berittener Bote oder ein Leuchtturm auf einem Hügel. Die damals bekannte Welt umfasste einen großen Teil von Europa, Asien und Afrika – aber weder Nord- und Südamerika noch Australien, die Arktis oder die Antarktis. Viele Kulturen hielten die Welt für flach: eine runde Scheibe oder sogar ein Quadrat, das nach den vier Himmelrichtungen ausgerichtet war. Trotz der Entdeckungen in der klassischen griechischen Antike war diese Überzeugung im Mittelalter noch weit verbreitet, wie sich an den *orbis-terrae*-Karten (Erdkreiskarten) ablesen lässt (Abbildung 4).

Abbildung 4: Weltkarte, die der marokkanische Kartograph al-Idrisi für König Roger II. von Sizilien um 1100 anfertigte.

Wer erkannte als Erster, dass die Welt rund war? Laut Diogenes Laertios, einem griechischen Biographen im 3. Jahrhundert, war es Pythagoras. In seinem Buch *Leben und Meinungen berühmter Philosophen*, einer Sammlung von Aussprüchen und biographischen Anmerkungen, die eine unserer Hauptquellen für das Privatleben der altgriechischen Philosophen ist, schrieb er: «Pythagoras war der Erste, der die Welt rund nannte, auch wenn Theophrastos dies Parmenides zuschreibt und Zenon Herodot.» Die alten Griechen behaupteten ganz unabhängig von den historischen Fakten gern, dass wichtige Entdeckungen von ihren berühmten Vorfahren gemacht worden seien, daher sollten wir diese Behauptung nicht unbesehen übernehmen, doch unbestritten ist, dass vom 5. Jahrhundert v. Chr. an alle angesehenen griechischen Philosophen und Mathematiker von der Kugelgestalt der Erde überzeugt waren. Diese Vorstellung scheint tatsächlich um die Zeit des Pythagoras aufgekommen zu sein und könnte auf einen seiner Anhänger zurückgehen. Aber es könnte sich auch um Allgemeinwissen gehandelt haben, das auf Hinweisen wie dem runden Schatten der Erde auf dem Mond bei einer Mondfinsternis oder auf einer Analogie zu dem offensichtlich runden Mond basierte.

Aber selbst für die Griechen war die Erde das Zentrum des Universums, und alles drehte sich um sie. Navigiert wurde nach ungefähren Berechnungen: Nachts orientierte man sich an den Sternen, tagsüber folgte man der Küstenlinie. Pythagoras' Gleichung änderte das alles. Sie eröffnete der Menschheit den Weg zum heutigen Verständnis der Geographie unseres Planeten und seines Platzes im Sonnensystem. Es war der erste entscheidende Schritt in Richtung auf geometrische Methoden, wie man sie für Kartographie, Navigation und Landvermessung braucht. Diese Gleichung lieferte zugleich den Schlüssel zu einer entscheidend wichtigen Beziehung zwischen Geometrie und Algebra. Diese Entwicklungslinie führt von der Antike geradewegs zur Allgemeinen Relativitätstheorie und zur Kosmologie (siehe Kapitel 13). Pythagoras' Gleichung eröffnete dem menschlichen Entdeckungsdrang im übertragenen wie auch im wörtlichen Sinne völlig neue Möglichkeiten. Sie enthüllte die Form unserer Welt und zeigte uns unseren Platz im Universum.

Viele der Dreiecke, auf die wir im realen Leben treffen, sind nicht rechtwinklig, daher mag die direkte Anwendbarkeit der Gleichung begrenzt erscheinen. Doch jedes Dreieck lässt sich in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen (Abbildung 6), jede polygonale Form in Dreiecke. Daher nimmt die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ eine Schlüsselstellung ein: Sie beweist, dass eine nützliche Beziehung zwischen der Form eines Dreiecks und den Längen seiner Seiten besteht. Das Gebiet, das sich aus dieser Erkenntnis entwickelte, ist die Trigonometrie, die Dreiecksmessung.

Das rechtwinklige Dreieck ist für die Trigonometrie von grundlegender Bedeutung, und vor allem bestimmt es die trigonometrischen Grundfunktionen: Sinus, Cosinus und Tangens. Diese Bezeichnungen sind arabischen Ursprungs, und die Geschichte dieser Funktionen und ihrer vielen Vorgänger zeigen den komplizierten Weg, auf dem die heutige Version des Gebietes entstand. Ich werde die Sache abkürzen und das Ergebnis erläutern. Ein rechtwinkliges Dreieck hat natürlich einen rechten Winkel, aber seine beiden anderen Winkel sind nicht festgelegt – davon abgesehen, dass sie sich zu 90° addieren. Mit jedem Winkel korrespondieren drei Funktionen, das heißt, Regeln zur Berechnung einer korrespondierenden Zahl. Für den Winkel A in Abbildung 5 mit den traditionellen Seiten a, b und c definieren wir Sinus (sin), Cosinus (cos) und Tangens (tan) wie folgt:

$$\sin A = a/c \quad \cos A = b/c \quad \tan A = a/b$$

Diese Größen sind nur vom Winkel *A* abhängig, da alle rechtwinkligen Dreiecke mit einem gegebenen Winkel *A* abgesehen vom Maßstab identisch sind.

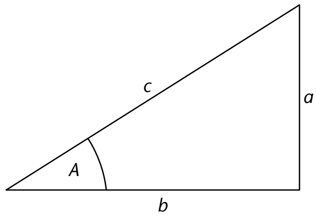


Abbildung 5: Trigonometrie basiert auf einem rechtwinkligen Dreieck.

Infolgedessen ist es möglich, für eine Reihe von Winkeln eine Tafel mit Sinus-, Cosinus- und Tangenswerten zu erstellen, mit deren Hilfe man dann Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke berechnen kann. Eine typische Anwendung, die bis in die Antike zurückreicht, besteht darin, die Höhe einer hohen Säule zu berechnen, wobei man nur Maße benutzt, die sich vom Boden aus erheben lassen. Nehmen wir an, aus 100 Meter Entfernung betrage der Winkel zur Spitze der Säule 22°. Setzen wir in Abbildung 5 $A = 22°$, sodass *a* die Höhe der Säule ist. Dann sagt uns die Definition der Tangensfunktion:

$$\tan 22^\circ = a/100$$

sodass gilt:

$$a = 100 \tan 22^\circ.$$

Da tan 22° gleich 0,404 ist, wenn wir ihn bis zur dritten Dezimalstelle angeben, folgern wir, dass $a = 40{,}4$ Meter ist.

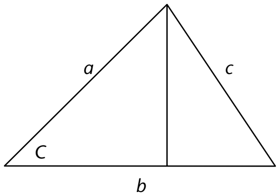


Abbildung 6: Unterteilung eines Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke.

Wenn man die trigonometrischen Funktionen einmal kennt, lässt sich die Gleichung des Pythagoras leicht auf Dreiecke ohne rechten Winkel ausdehnen. Abbildung 6 zeigt ein Dreieck mit einem Winkel C und den Seiten a, b, c. Man unterteile das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke, wie oben zu sehen. Dann zeigen eine zweifache Anwendung des Pythagoras und ein wenig Algebra,[4] dass gilt:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2$$

was der Pythagoras-Gleichung ähnelt, abgesehen von dem zusätzlichen Term $-\,2ab \cos C$. Diese «Cosinusregel» erfüllt dieselbe Aufgabe wie der Pythagoras, indem sie c mit a und b verknüpft, doch nun müssen wir Angaben über den Winkel C einbeziehen.

Die Cosinusregel ist einer der Pfeiler der Trigonometrie. Wenn wir zwei Seiten eines Dreiecks und den eingeschlossenen Winkel kennen, können wir daraus die dritte Seite berechnen. Andere Gleichungen ergeben dann die verbliebenen Winkel. All diese Gleichungen lassen sich letztlich auf rechteckige Dreiecke zurückführen.